3. Control óptimo de sistemas dinámicos lineales discretos. Resumen

Dado un sistema discreto lineal en variables de estado

$$x_{k+1} = Fx_k + Gu_k$$

donde x es el vector de estado de dimensión $n \times 1$; u es la señal de control de dimensión $m \times 1$; F y G son matrices constantes conocidas de dimensión $n \times n$ y $n \times m$ respectivamente. El estado inicial se supone conocido, x_0. El sistema se controla usando realimentación del estado:

$$u_k = -K_k x_k$$

donde, como se ha demostrado en clase, $K_k = \left(R + G^T S_{k+1} G\right)^{-1} G^T S_{k+1} F$ es la ganancia de realimentación óptima que se conoce con el nombre de *ganancia de Kalman.* El algoritmo de cálculo de las ganancias se puede resumir como sigue:

Algoritmo de cálculo de ganancias

---

1. Condiciones iniciales:

- $K_N \leftarrow 0$
- S_N dado

2. Hacer $k \leftarrow N$

3. Hacer $M_k \leftarrow S_k - S_k G \left(R + G^T S_k G\right)^{-1} G^T S_k$

4. Hacer $K_{k-1} \leftarrow \left(R + G^T S_k G\right)^{-1} G^T S_k F$

5. Guardar K_{k-1}

6. Hacer $S_{k-1} \leftarrow F^T M_k F + Q$

7. Hacer $k \leftarrow k - 1$

8. Ir al paso 3.

Independientemente de cuál sea el estado inicial x_0, para aplicar el control a un sistema dado, siempre se utilizan las ganancias calculadas con el algoritmo anterior, que deben por ello estar almacenadas en un computador.

A partir de la ecuación de estados y de la ley de control se obtiene la función de transferencia en bucle cerrado

$$x_{k+1} = (F - GK_k)\, x_k$$

que nos permite calcular la trayectoria óptima de los estados.

Un aspecto importante sobre este sistema de control es que aunque el sistema es invariante en el tiempo (las matrices F y G son constantes) se obtiene una ley de realimentación variable en el tiempo: la ganancia K depende del instante k. No obstante, estos valores pueden ser calculados y guardados para su uso posterior, siempre que la longitud N del intervalo de control sea conocida. Esto es así debido a que, como muestra el algoritmo anterior, no se necesita el estado inicial x_0 para el cálculo de las ganancias. Por tanto, independientemente del estado inicial del sistema, la señal de control es la misma.

Puede demostrarse que la ley de control óptima que se obtiene es:

$$J^* = \frac{1}{2} x_0^T S_0 x_0$$

De esta expresión puede deducirse un resultado interesante. Como hemos visto, la secuencia S_k puede calcularse *antes* de que se aplique la señal de control, por lo que dado un estado inicial x_0, podemos utilizar la expresión anterior para calcular el valor de la función de coste que se obtiene al aplicar el control óptimo *¡antes de que se aplique!*

En general cualquier instante de tiempo k del intervalo $[0, N]$ puede considerarse como el intervalo inicial del subintervalo $[k, N]$, de modo que el valor de la función de coste para ese subintervalo es

$$J_k^* = \frac{1}{2} x_k^T S_k x_k \ ,$$

lo que significa que dado el estado actual x_k podemos calcular el "coste restante" de aplicar la señal de control desde el instante k a N.

Aunque el problema lo hemos resuelto en clase con las matrices F, G, Q y R constantes, los resultados obtenidos son válidos para sistemas variables en el tiempo F_k, G_k, Q_k y R_k, sin más que añadir los subíndices a estas matrices en todas las expresiones. Las demostraciones son idénticas, en clase hemos considerado el caso invariante en el tiempo por simplificar un poco la notación.

A continuación se resumen las ecuaciones del problema de control óptimo para sistemas lineales discretos con función de coste cuadrática.

CONTROLADOR ÓPTIMO DISCRETO LINEAL CUADRÁTICO

- **Modelo del sistema:**

  $$x_{k+1} = Fx_k + Gu_k$$

  con $k > 0$ y x_0 dado.

- **Función de coste:**

  $$J = \frac{1}{2} x_N^T S x_N + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \left(x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k \right)$$

- **Suposiciones:**

  $$S \geqslant 0, \quad Q \geqslant 0, \quad R > 0, \qquad \text{y simétricas}$$

- **Ley de realimentación óptima:**

  - Ecuación de Riccati

    $$S_k = F^T M_{k+1} F + Q$$

    donde

    $$M_{k+1} = S_{k+1} - S_{k+1} G \left(R + G^T S_{k+1} G \right)^{-1} G^T S_{k+1}$$

    con $k < N$ y S_N dado

  - Ganancia

    $$K_k = \left(R + G^T S_{k+1} G \right)^{-1} G^T S_{k+1} F \quad k < N$$

  - Señal de control

    $$u_k = -K_k x_k \quad k < N$$

  - Valor final de la función de coste

    $$J^* = \frac{1}{2} x_0^T S_0 x_0$$

Excepto en los casos más sencillos, la solución de problemas de control óptimo se hace mediante el uso de un computador. Para ello existen paquetes matemáticos que permiten resolver la ecuación de Riccati numéricamente.