

3. Control óptimo de sistemas dinámicos lineales discretos.

Ejemplos

Ejemplo 1. Control digital de un circuito RC.

En el circuito de la figura 1 se desea controlar la tensión del condensador $x(t)$ aplicando la entrada $u(t)$, usando un microprocesador, sólo en los instantes kT . El microprocesador también muestrea $x(t)$ en cada periodo de muestreo T .

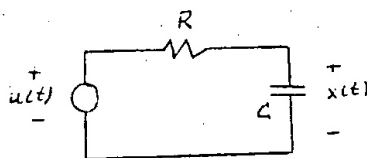


Figura 1

En primer lugar obtendremos la ecuación de estado. Aplicando Kirchoff se tiene:

$$Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt = u(t)$$

$$i(t) = C \frac{dx(t)}{dt}$$

De las dos ecuaciones anteriores se llega a:

$$RC\dot{x}(t) + x(t) = u(t)$$

$$\dot{x}(t) = -\frac{1}{RC}x(t) + \frac{1}{RC}u(t)$$

Denotando la constante de tiempo $\tau = RC$,

$$\dot{x} = \frac{-1}{\tau}x + \frac{1}{\tau}u$$

Suponemos $\tau = 0,5$, de modo que se tiene

$$\dot{x} = -0,2x + 0,2u.$$

Tomamos el periodo de muestreo $T = 0,5$ s . El sistema discretizado tendrá la forma

$$x_{k+1} = fx_k + gu_k$$

donde

$$f = e^{-T/\tau}$$

y

$$g = \left(\int_0^T e^{-T/\tau} dt \right) \frac{1}{\tau} = [-\tau e^{-T/\tau}]_0^T \frac{1}{\tau} = (1 - e^{-T/\tau})$$

en este caso $f = 0,9048$ y $g = 0,0952$.

Supongamos que deseamos que el control u_k y el estado x_k tomen un valor pequeño en un intervalo de 5 segundos, cualquiera que sea el valor inicial x_0 del que se parta. En este caso $N = 5/T = 10$. Para expresar estos objetivos matemáticamente, seleccionamos la función de coste

$$J = \frac{1}{2} s x_N^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} (q x_k^2 + r u_k^2)$$

En este caso la ecuación de cálculo de la ganancia de Kalman queda:

$$K_k = (R + G^T S_{k+1} G)^{-1} G^T S_{k+1} F = \frac{f g s_{k+1}}{g^2 s_{k+1} + r}$$

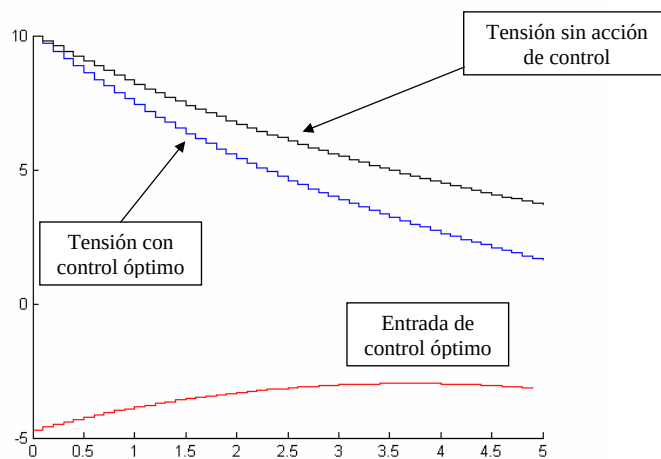
y la ecuación de Riccati para el cálculo de S :

$$\begin{aligned} S_k &= F^T \left[S_{k+1} - S_{k+1} G (R + G^T S_{k+1} G)^{-1} G^T S_{k+1} \right] F + Q = \\ &= f^2 \left(s_{k+1} - \frac{s_{k+1}^2 g^2}{r + g^2 s_{k+1}} \right) + q = f^2 \left(\frac{s_{k+1} r + s_{k+1}^2 g^2 - s_{k+1}^2 g^2}{r + g^2 s_{k+1}} \right) + q = \\ &= \frac{f^2 r s_{k+1}}{r + g^2 s_{k+1}} + q \end{aligned}$$

Eligiendo S_N muy elevado, podemos forzar que el valor de x_N sea muy pequeño. La figura 2 muestra el valor del estado y del control cuando no existe ninguna acción de control y cuando el control óptimo se determina con $q = 1$, $r = 1$, $s_N = 100$ y $x_0 = 1$.

Control digital óptimo de un circuito RC

Parámetros: $q = 1$, $r = 1$, $S_N = 100$



Parámetros: $q = 1$, $r = 1$, $S_N = 10000$

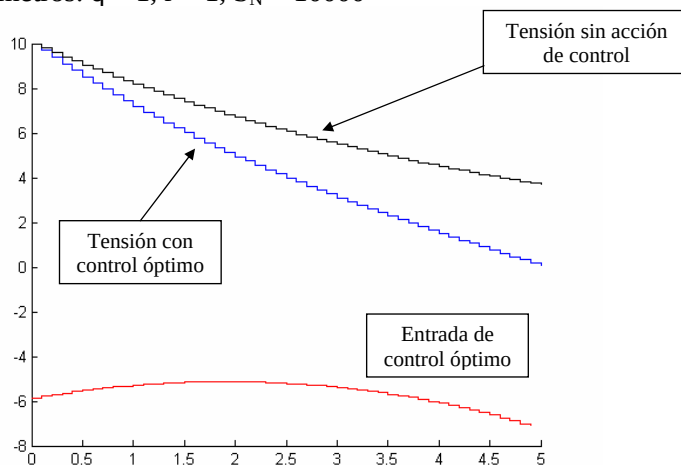


Figura 2

Ejemplo 2. Control digital de un integrador doble.

Muchos sistemas pueden describirse por la ecuación diferencial

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = u$$

(por ejemplo la ley de Newton $F = m\ddot{e}$). Su función de transferencia es

$$G(s) = \frac{1}{s^2}$$

Si introducimos los estados

$$x_1 = y, \quad x_2 = \dot{y}$$

obtenemos la representación de estados

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Si muestreamos el sistema utilizando un bloqueador de orden cero con periodo de muestreo T , obtenemos el modelo de estado discreto

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix} u_k$$
$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x_k$$

Suponemos que el periodo de muestreo es $T = 0,1$ s. Las matrices de coste Q y S se eligen como

$$S = Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

que indica que se “pesa” el valor de la señal y , pero no el de la velocidad $\dot{y}$. La matriz R es en este caso un escalar r , pues sólo existe una señal de control.

En las figuras 3 y 4 se comprueba el efecto de este factor de peso. En la figura 3 se muestran los valores de la ganancia para distintos valores de r , y la figura 4 muestra los valores de los estados y del control. El número de instantes de muestreo es de $N = 50$, lo que para un periodo de muestreo de 0,1 s significa que el tiempo total es 5 segundos. Como vemos, las ganancias permanecen constantes durante la mayor parte del intervalo de control, siempre que éste sea grande comparado con el transitorio de las ganancias. Este importante aspecto lo estudiaremos en la sección siguiente.

En la figura 4 también se comprueba que un aumento en el valor de r hace que disminuya la magnitud de la señal de control.

Incluso en los problemas más sencillos como los anteriores, resulta muy laborioso realizar los cálculos de forma manual, por lo que éstos se realizan en un computador. Como ejemplo, en la página web de la asignatura puede encontrarse un programa en Matlab para el cálculo de las ganancias y la señal de control (a partir del cual pueden dibujarse las gráficas de las figuras 3 y 4).

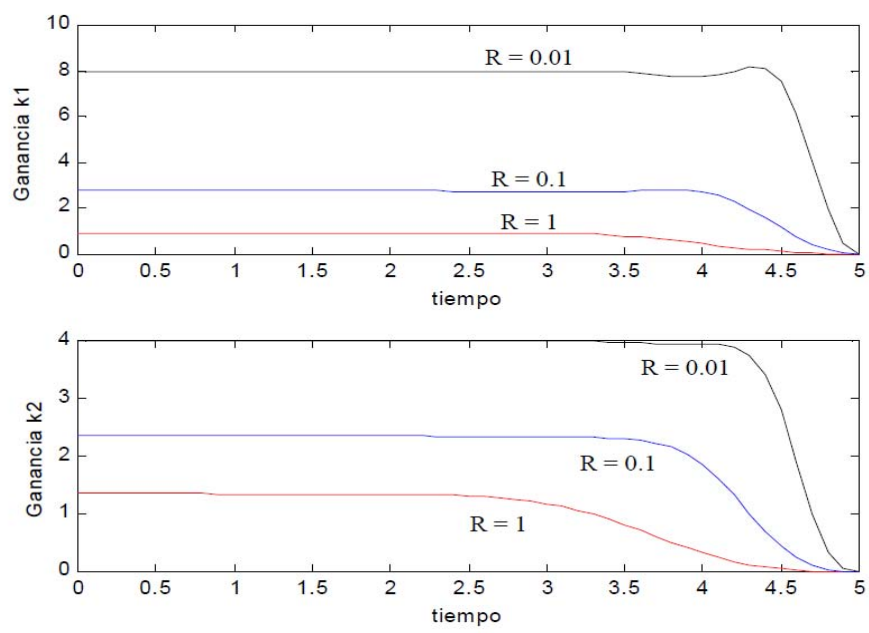


Figura 3

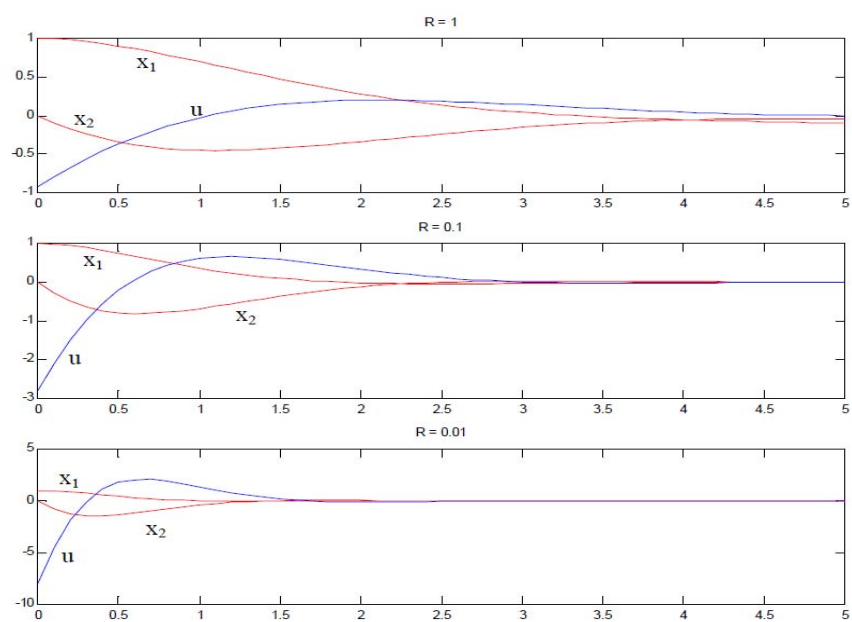


Figura 4