4. Solución en el estado estacionario. Ejemplos

Control en estado estacionario de un sistema escalar.

En este ejemplo vamos a estudiar el caso particular de control óptimo lineal cuadrático para un sistema escalar, en estado estacionario ($N = \infty$). Sea el sistema

$$x_{k+1} = f \cdot x_k + g \cdot u_k$$

con la función de coste

$$J_\infty = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(q x_k^T x_k + r u_k^T u_k \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(q x_k^2 + r u_k^2 \right), \qquad q > 0$$

con la señal de control

$$u_k = -K \cdot u_k$$

La ganancia de realimentación en estado estacionario será

$$\overline{K} = (R + G^T \overline{S} G)^{-1} G^T \overline{S} F$$

que en el caso escalar será:

$$\overline{k} = \frac{f g \overline{s}}{r + g^2 \overline{s}}$$

donde $\overline{s}$ es la única solución positiva de la ecuación algebraica de Riccati.

- **Controlabilidad.** En este caso la matriz de controlabilidad es $W = g$, con lo que el sistema será controlable (suponiendo que $g \neq 0$).
- **Observabilidad.** Como $q > 0$, si tomamos $c = \sqrt{q}$, entonces la matriz de observabilidad es $P = c \neq 0$, con lo cual el par (f, c) es observable.

De lo anterior se deduce que existe $\overline{s}$, solución definida positiva de la ecuación algebraica de Riccati, a partir de la cual se podrá calcular la ganancia de Kalman $\overline{k}$ para la que el sistema es estable en bucle cerrado.

Tratamos de resolver ahora la ecuación algebraica de Riccati.

$$S = F^T \left[S - SG(R + G^T SG)^{-1} G^T S \right] F + Q$$

$$s = f^2 \left(s - \frac{s^2 g^2}{g^2 s + r} \right) + q$$

Operando se llega a la ecuación

$$g^2 s^2 + \left[\left(1 - f^2 \right) r - g^2 q \right] s - qr = 0$$

Dividiendo ambos miembros de la ecuación por $(1 - f^2)r$ se tiene

$$\frac{g^2}{(1 - f^2)r} s^2 + \left[1 - \frac{g^2 q}{(1 - f^2)r} \right] s - \frac{qr}{(1 - f^2)r} = 0$$

Si denotamos

$$\delta = \frac{g^2 q}{(1 - f^2)r}$$

la ecuación queda

$$\boxed{\frac{\delta}{q} s^2 + (1 - \delta)s - \frac{\delta r}{g^2} = 0} \tag{1}$$

que tiene las dos soluciones

$$s = \frac{q}{2\delta} \left[\pm \sqrt{(1 - \delta^2) + \frac{4\delta}{(1 - f^2)}} - (1 - \delta) \right]$$

Podemos considerar dos casos:

1. **Sistema estable.** Supongamos que $|f| < 1$. Entonces $(1 - f^2) > 0$ y $\delta > 0$. En este caso la única solución no negativa de la ecuación (1) es

$$s = \frac{q}{2\delta} \left[\sqrt{(1 - \delta^2) + \frac{4\delta}{(1 - f^2)}} - (1 - \delta) \right]$$

y la ganancia en estado estacionario viene dada por

$$\overline{k} = \frac{fgs}{r + g^2 s}$$

(obsérvese que por las propiedades de controlabilidad y observabilidad, se tiene $q > 0$, $g \neq 0$, por tanto también se cumple $\delta > 0$ y $s > 0$). El sistema en bucle cerrado es

$$f^c = f - gk = \frac{f}{1 + (\frac{g^2}{r})s}$$

De las condiciones anteriores se deduce que $|f^c| < |f|$, por tanto el sistema en bucle cerrado es estable.

2. Sistema inestable. Si $|f| > 1$, entonces $(1 - f^2) < 0$ y $\delta < 0$. En este caso, la única solución no negativa de la ecuación (1) es

$$s = \frac{-q}{2\delta}\left[\sqrt{(1-\delta^2) + \frac{4\delta}{(1-f^2)}} - (1-\delta)\right]$$

El sistema en bucle cerrado será ahora

$$f^c = f - gk = \frac{f}{1 + (\frac{g^2}{r})s} =$$

$$= \frac{f}{1 - \frac{1-f^2}{2}\left[\pm\sqrt{(1-\delta)^2 + \frac{4\delta}{(1-f^2)}} - (1-\delta)\right]}$$

En este caso se sigue cumpliendo que $|f^c| < |f|$. Para demostrar que $|f^c| < 1$, puede comprobarse en esta última expresión que si $|f| >> 1$, entonces $\delta \simeq 0$ y por tanto

$$f^c \simeq \frac{1}{f}$$

por lo que el sistema en bucle cerrado será estable.