Algunas funciones de coste útiles

Recordemos la forma general de la función de coste:

$$J = \phi(N, x_N) + \sum_{k=0}^{N-1} L^k(x_k, u_k)$$

En cualquier problema de control óptimo debemos plantear la correspondiente función de coste y obtener las funciones ϕ y L^k de la expresión general anterior. Veamos tres ejemplos que son muy habituales en ingeniería de control.

1. Problemas de tiempo mínimo

Supongamos que deseamos encontrar el control u_k que lleva al sistema de un estado inicial x_0 a un estado final deseado x en un tiempo mínimo N. Podemos, en este caso, seleccionar la función de coste como

$$J = N,$$

y especificar la condición frontera

$$x_N = x$$

En este caso se tendría $\phi = N$ y $L = 0$ o, de forma equivalente, $\phi = 0$ y $L = 1$.

2. Problemas de combustible mínimo

Para determinar el control escalar u_k que lleva el sistema desde x_0 a un estado final deseado x en un tiempo fijo N utilizando el mínimo combustible (suponemos que la acción de control es función directa de la cantidad de combustible o fuente de energía necesaria para controlar el sistema como en misiles, aviones o control de temperatura de hornos y calefacciones), podemos utilizar:

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} |u_k|$$

ya que el combustible quemado es proporcional a la magnitud del vector de control. En este caso, $\phi = 0$ y $L^k = |u_k|$. La condición frontera es, al igual que en el caso anterior, $x_N = x$. También puede usarse una expresión cuadrática de la señal de control como

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} u_k^2$$

3. Problemas de energía mínima

Supongamos que queremos determinar la señal de control u_k que minimice la energía del estado final y de todos los estados intermedios, así como la del control utilizado para conseguirlo. Supongamos que fijamos el instante final en N. Podemos utilizar como función de coste:

$$J = \frac{1}{2} s x_N^T x_N + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \left(q x_k^T x_k + r u_k^T u_k \right)$$

donde q, r y s son factores escalares de peso. En este caso ϕ y L son funciones cuadráticas:

$$\phi = \frac{1}{2} s x_N^T x_N$$

$$L = \frac{1}{2} \left(q x_k^T x_k + r u_k^T u_k \right)$$

Minimizar la energía corresponde, de alguna manera, a mantener el estado y el control próximos a cero. Si nos es más importante mantener pequeños a los estados intermedios, debemos elegir un valor de q elevado, para que influya mucho en J, función que deseamos minimizar. Si es más importante que la energía del control sea pequeña, entonces debemos seleccionar un valor elevado de r. Si estamos interesados en un valor pequeño del estado final, entonces el valor de s debe ser elevado.

Para mayor generalidad se pueden elegir matrices de peso Q, R y S en lugar de escalares, como se vera en las próximas secciones.