# CONTROL AVANZADO DE SISTEMAS
## Anexo a la práctica 1 de Control Inteligente

## Ejemplo de diseño directo: control de un péndulo invertido.

El problema consiste en equilibrar verticalmente el péndulo montado sobre un móvil como se muestra en la figura 1, donde $y$ es el ángulo que forma el péndulo con la vertical (en radianes), $l$ es la mitad de la longitud del péndulo (en metros) y $u$ es la fuerza de entrada que mueve el carro (en Newtons). Denotaremos como $r$ la posición angular deseada del péndulo. El objetivo es situar el péndulo en equilibrio verticalmente ($r = 0$), siendo su posición inicial cualquier ángulo distinto del vertical ($y \neq 0$). Éste es un problema teórico muy simple de control no lineal y existen varias técnicas de control que lo solucionan (por ejemplo, para esta configuración un PID puede controlarlo bien). En este ejemplo se usará este sistema para ilustrar la estructura y funcionamiento básico de un controlador borroso.

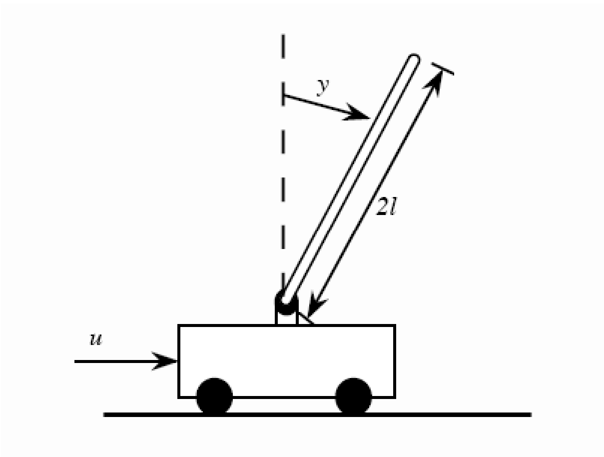


Figura 1

**Elección de las entradas y salidas**

Considérese un operario que esté controlando manualmente el péndulo, como se muestra en la figura 2. El controlador borroso se diseñará de tal forma que automatice el control realizado manualmente de forma satisfactoria por el operario. El primer paso de diseño consiste en determinar la *información* que se utiliza como *entrada* para el control. Supongamos que la información usada por el operario es:

$$e(t) = r(t) - y(t)$$

y

$$\frac{d}{dt}e(t)$$

Existen otras muchas posibilidades (como por ejemplo la integral del error), pero estas dos entradas tienen sentido intuitivamente. A continuación debe identificarse la *variable de control* (es decir la salida del controlador borroso). Para el péndulo descrito la única posibilidad es la fuerza que mueve el carro, $u$.

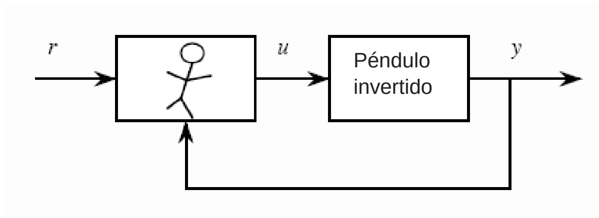


Figura 2

En la figura 3 se muestra el bucle de control con las entradas y salidas elegidas.

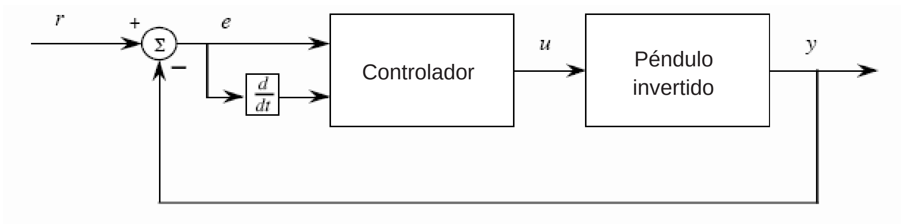


Figura 3

**Base de reglas**

En este ejemplo la base de reglas se diseña emulando las reglas de control manual del operador en la estructura del controlador borroso. Usaremos una variable para cada una de las entradas y salidas definidas anteriormente:

- error, $e(t)$
- cambio del error, $\frac{d}{dt}e(t)$
- fuerza, $u(t)$

Los posibles valores que podrán tomar estas variables son los siguientes:

- $ng$ (negativo grande).
- $np$ (negativo pequeño).
- $z$ (cero).
- $pp$ (positivo pequeño).
- $pg$ (positivo grande).

Para una descripción más intuitiva utilizaremos números enteros para representar cada una de estas variables:

- $-2$ para $ng$.

- $-1$ para $np$.
- $0$ para $z$.
- $1$ para $pp$.
- $2$ para $pg$.

Cada una de estas variables representa un rango de valores con un signo y magnitud aproximadas. Como para el péndulo invertido $r = 0$ y $e = r - y$, se tiene que

$$e = -y$$

y por tanto

$$\frac{d}{dt}e = -\frac{d}{dt}y$$

ya que $\frac{d}{dt}r = 0$. Primero estudiaremos cómo cuantificar el comportamiento dinámico del sistema usando estas variables para a continuación hacer lo mismo con el control del sistema. Para el péndulo invertido algunas configuraciones interesantes para el control son las siguientes:

- error $= pg$, representa el estado en el que el péndulo se encuentra a la izquierda de la vertical con un ángulo significativo.
- error $= np$, el péndulo está inclinado ligeramente a la derecha pero no lo suficientemente cercano a la vertical como para considerar que el error es cero y tampoco demasiado alejado como para considerarlo como $ng$.
- error $= z$, representa el estado en el que el péndulo se encuentra muy cercano a la posición vertical. Se aceptará un error cercano al valor deseado $e(t) = 0$.
- error $= pg$ y cambio del error $= pp$, representa el estado en el que el péndulo está a la izquierda de la vertical y, como $\frac{d}{dt}y < 0$, se está *alejando* de la posición vertical (en el sentido contrario a las agujas del reloj).
- error $= np$ and cambio del error $= pp$, representa el estado en el que el péndulo está ligeramente a la derecha de la vertical y, como $\frac{d}{dt}y < 0$, se está moviendo *hacia* la posición vertical (en el sentido contrario a las agujas del reloj).

**Reglas**

Las reglas deben codificar el conocimiento sobre cómo controlar el sistema. En particular, para las tres posiciones mostradas en la figura 4 se tienen las tres reglas siguientes:

1. If error=$ng$ and cambio del error=$ng$ then fuerza=$pg$.

   Esta regla cuantifica el estado de la figura 4(a) donde el péndulo tiene un ángulo grande positivo y se está moviendo en el sentido de las agujas del reloj. Por tanto, está claro que deberíamos aplicar una fuerza positiva grande (hacia la derecha) tal que el péndulo tienda a moverse hacia la posición deseada.

2. If error=$z$ and cambio del error=$pp$ then fuerza=$np$.

   Esta regla cuantifica el estado de la figura 4(b) donde el péndulo tiene un ángulo cercano a cero y se está moviendo en el sentido contrario a las agujas del reloj. Por tanto, debería aplicarse una fuerza pequeña negativa (hacia la izquierda) para contrarrestar el movimiento tal que se mueva hacia cero (una fuerza positiva podría hacer que el péndulo sobreoscile sobre la posición deseada excesivamente).

3. If error=$pg$ and cambio del error=$np$ then fuerza=$np$.

   Esta regla cuantifica el estado de la figura 4(c) donde el péndulo está a la izquierda muy lejano de la vertical y se está moviendo en el sentido de las agujas del reloj. Por tanto, debería aplicarse una fuerza pequeña negativa (hacia la izquierda) para ayudar el movimiento, pero no grande ya que el péndulo ya se está moviendo en el sentido correcto.

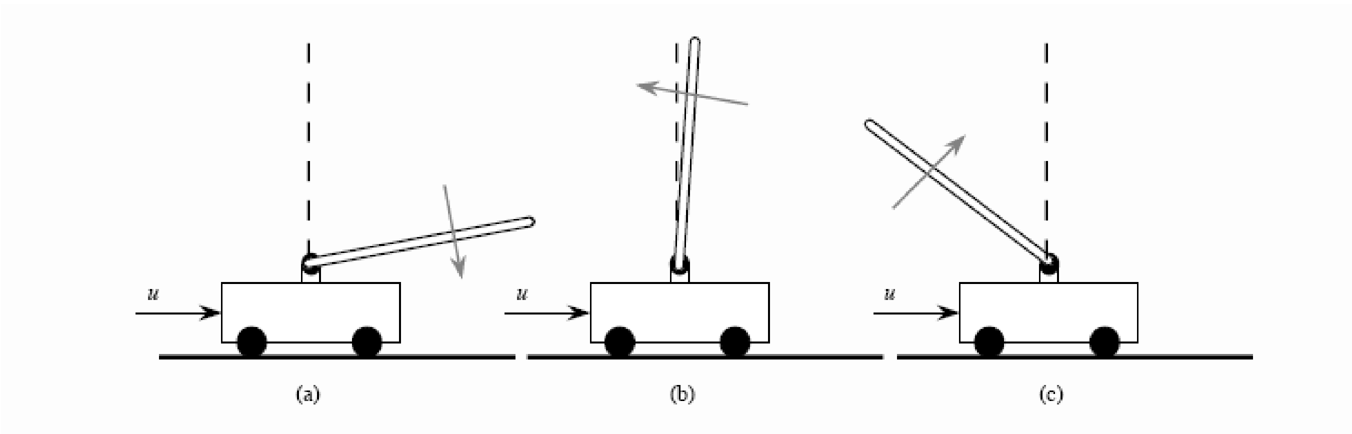


Figura 4

Con razonamientos de este tipo puede completarse la base reglas que, para cubrir todos los posibles valores, estará formada por 25 reglas (2 entradas con 5 valores posibles cada una, $5^2 = 25$ reglas). Para ello puede rellenarse una tabla como la de la figura siguiente (en la que sólo se han incluido los valores correspondientes a las tres reglas anteriores):

| fuerza $u$ | | cambio del error $\dot{e}$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
| error $e$ | -2 | 2 | | | | |
| | -1 | | | | | |
| | 0 | | | | -1 | |
| | 1 | | | | | |
| | 2 | | -1 | | | |

Tabla 1

La matriz de reglas tendrá una dimensión de $25 \times 3$:

$$
\begin{bmatrix}
A_1^1 & A_2^1 & B^1 \\
A_1^2 & A_2^2 & B^2 \\
A_1^3 & A_2^3 & B^3 \\
A_1^4 & A_2^4 & B^4 \\
A_1^5 & A_2^5 & B^5 \\
A_1^6 & A_2^6 & B^6 \\
A_1^7 & A_2^7 & B^7 \\
A_1^8 & A_2^8 & B^8 \\
A_1^9 & A_2^9 & B^9 \\
A_1^{10} & A_2^{10} & B^{10} \\
A_1^{11} & A_2^{11} & B^{11} \\
A_1^{12} & A_2^{12} & B^{12} \\
A_1^{13} & A_2^{13} & B^{13} \\
A_1^{14} & A_2^{14} & B^{14} \\
A_1^{15} & A_2^{15} & B^{15} \\
A_1^{16} & A_2^{16} & B^{16} \\
A_1^{17} & A_2^{17} & B^{17} \\
A_1^{18} & A_2^{18} & B^{18} \\
A_1^{19} & A_2^{19} & B^{19} \\
A_1^{20} & A_2^{20} & B^{20} \\
A_1^{21} & A_2^{21} & B^{21} \\
A_1^{22} & A_2^{22} & B^{22} \\
A_1^{23} & A_2^{23} & B^{23} \\
A_1^{24} & A_2^{24} & B^{24} \\
A_1^{25} & A_2^{25} & B^{25}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
-2 & -2 & 2 \\
-2 & -1 & ? \\
-2 & 0 & ? \\
-2 & 1 & ? \\
-2 & 2 & ? \\
-1 & -2 & ? \\
-1 & -1 & ? \\
-1 & 0 & ? \\
-1 & 1 & ? \\
-1 & 2 & ? \\
0 & -2 & ? \\
0 & -1 & ? \\
0 & 0 & ? \\
0 & 1 & -1 \\
0 & 2 & ? \\
1 & -2 & ? \\
1 & -1 & ? \\
1 & 0 & ? \\
1 & 1 & ? \\
1 & 2 & ? \\
2 & -2 & ? \\
2 & -1 & -1 \\
2 & 0 & ? \\
2 & 1 & ? \\
2 & 2 & ?
\end{bmatrix}
$$

**Funciones de pertenencia**

En la figura 5 se muestran las funciones de pertenencia de entrada y salida elegidas. Obsérvese que también tendría sentido elegir otro tipo de funciones (como por ejemplo gaussianas).

Debe prestarse especial atención a la forma de las funciones de pertenencia en los límites superior e inferior. Para las entradas $e(t)$ y $\frac{d}{dt}e(t)$ se observa que las funciones de pertenencia de los extremos se saturan en 1. Esto tiene sentido intuitivo ya que a partir de un punto se agrupan todos los valores como pertenecientes a los conjuntos extremos *pg* o *ng*. Estas funciones de pertenencia caracterizan este fenómeno ya que se corresponden con valores "mayores que" (para el lado derecho) o "menores que" (para el lado izquierdo) a uno dado.

Sin embargo, para la salida $u$, las funciones de pertenencia de los extremos no pueden saturarse para que el controlador esté correctamente definido. El motivo de esto es que el controlador debe dar acciones de control concretas para el proceso y no es posible especificar reglas de control a un actuador del estilo “cualquier valor mayor que, por ejemplo, 10 es aceptable”.

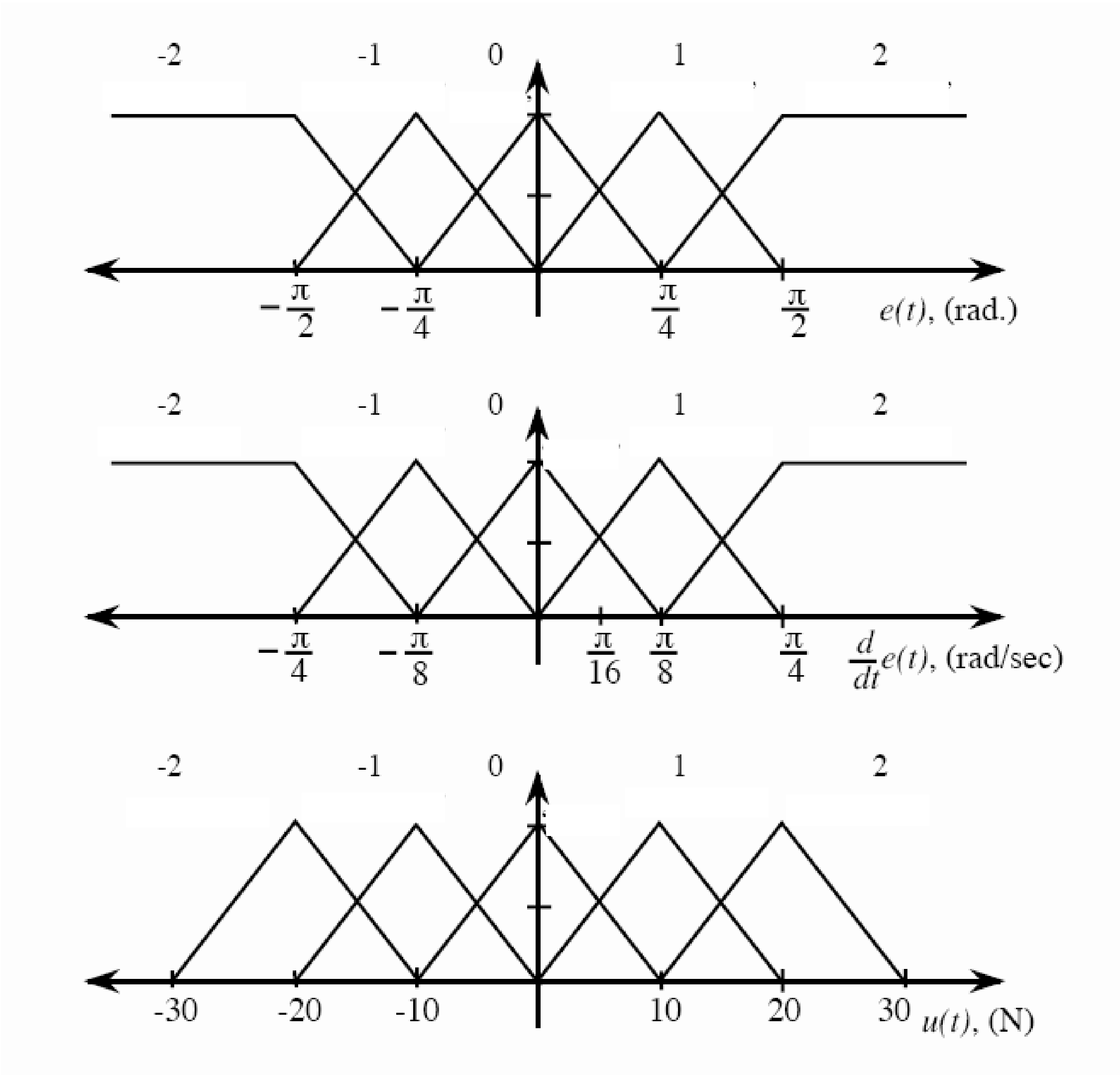


Figura 5

**Sintonización adicional del regulador**

El regulador obtenido en los apartados anteriores puede sintonizarse ajustando las ganancias $g_0$, $g_1$ y $h$ que se muestran en la figura 6.

Básicamente las constantes $g_0$, $g_1$ y $h$ sintonizan el regulador escalando los intervalos iniciales de $e$, $\dot{e}$ y $u$. Como ejercicio se propone Comprobar en simulación si eligiendo valores adecuados para $g_0$, $g_1$ y $h$ se pueden conseguir mejores resultados, comparando la posible sobreoscilación, tiempo de subida y tiempo de establecimiento respecto al caso anterior.

La variación de la ganancia $g_0$ tiene como resultado el escalado del eje horizontal de las funciones de pertenencia para la entrada $e(t)$ por el factor $\frac{1}{g_0}$. En general, la ganancia $g_0$ tiene los efectos siguientes:

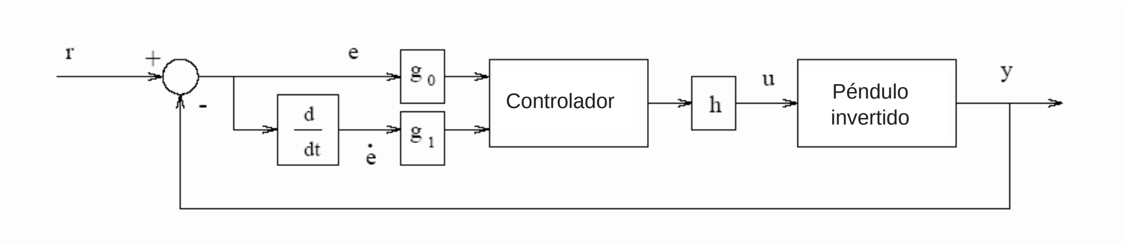


Figura 6

- Si $g_0 = 1$, no hay efecto sobre las funciones de pertenencia.
- Si $g_0 < 1$, las funciones de pertenencia se "dispersan" uniformemente por un factor $\frac{1}{g_0}$. Por ejemplo, si $g_0 = 0{,}1$, el efecto es equivalente a multiplicar el eje $X$ de las funciones de pertenencia de $e(t)$ por 10, de tal forma que las funciones de pertenencia representarían valores de mayor valor absoluto ($pg$ representaría números más grandes).
- Si $g_0 > 1$, las funciones de pertenencia se "contraen" uniformemente. Por ejemplo, si $g_1 = 10$, el efecto es equivalente a multiplicar por 0,1 los números del eje $X$ en las gráficas de las funciones de pertenencia de $e(t)$, de tal forma que las funciones de pertenencia representarían valores de menor valor absoluto ($pg$ representaría números más pequeños).

De forma análoga, la variación de la ganancia $g_1$ provoca un escalado del eje horizontal de las funciones de pertenencia de la entrada $\dot{e}(t)$ por $\frac{1}{g_1}$.

Para la ganancia $h$ de la salida se tiene:

- Si $h = 1$, no tiene efecto en las funciones de pertenencia de salida.
- Si $h < 1$, se produce una contracción de las funciones de pertenencia de salida haciendo por tanto que sus valores asociados sean más pequeños.
- Si $h > 1$, se produce una dispersión de las funciones de pertenencia de salida haciendo por tanto que sus valores asociados sean mayores.